# Metodi per il calcolo della radice quadrata

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

## Note storiche

I primi ad occuparsi del problema dell'estrazione di radice quadrata di un numero sono stati i babilonesi. Essi, tra i primi ad utilizzare un sistema di numerazione posizionale, avevano elaborato un procedimento per l'estrazione di radice quadrata che spesso viene attribuito a matematici posteriori, come Archita (428 - 365 a.C.) oppure ad Erone di Alessandria (vissuto tra il I e II secolo d.C.) oppure a Newton.

I babilonesi avevano ricavato un valore di $\sqrt{2}$ pari a 1,414222 con un errore di circa 0,000008 dal valore vero. Di Erone di Alessandria, matematico e scienziato greco, si hanno poche notizie biografiche. Si occupò di meccanica, matematica e fisica. A lui si deve la formula (detta appunto formula di Erone) mediante la quale calcolare l'area di un triangolo qualsiasi, noti i suoi lati. Studiò metodi approssimati per risolvere problemi di misurazione, sia in geometria che in geodesia ed inventò un metodo per approssimare le radici quadrate e cubiche di numeri che non siano quadrati o cubi perfetti e proprio del metodo di approssimazione delle radici quadrate di cui vogliamo occuparci.

## Metodo babilonese [ modifica | modifica wikitesto ]

Dato un valore $\alpha > 0$, un algoritmo per approssimare $\sqrt{\alpha}$ comunemente usato è conosciuto come metodo babilonese e sfrutta gli stessi principi poi codificati nel metodo di Newton. Questo metodo funziona nel modo seguente:

1. Poni $n = 1$ e inizia con un valore arbitrario positivo $x_n$ (quanto più esso è prossimo alla radice, tanto migliore è la convergenza dell'algoritmo)
2. sostituisci $x_n$ con la media di $x_n$ e $\alpha/x_n$
3. aumenta n e vai al punto 2

Questo algoritmo può essere rappresentato da

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$$

da cui si ricava $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$ .

### Interpretazione geometrica [ modifica | modifica wikitesto ]

Dato un numero $\alpha$ positivo, la sua radice quadrata può essere vista come il lato di un quadrato la cui area è proprio $\alpha$ stesso. L'idea è quella di usare dei rettangoli che possiedano la stessa area $\alpha$ del quadrato per arrivare attraverso approssimazioni successive ad avere proprio il quadrato che stiamo cercando.

Immaginiamo quindi di partire con un certo valore $x_1$ per il lato del nostro rettangolo: l'altro lato misurerà $\frac{\alpha}{x_1}$. Prendendo la media di questi due valori

$$\frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{\alpha}{x_1}\right),$$

abbiamo due possibilità:

- la media è uguale a $x_1$, quindi abbiamo già trovato la $\sqrt{\alpha}$;
- la media è diversa da $x_1$.

In questo secondo caso chiamiamo questo valore medio $x_2$ e procediamo nello stesso modo usato per $x_1$: calcoliamo il valore dell'altro lato del rettangolo di area $\alpha$ e lato $x_2$, otteniamo un nuovo valore medio $x_3$ e così via.

Daremo origine ad una successione di rettangoli equiestesi i cui lati saranno ad ogni passo più vicini in lunghezza, ottenendo al limite un quadrato e quindi il valore corretto della radice di $\alpha$. Il metodo dà risposta corretta in numero finito di passi nel caso in cui $\alpha$ sia un quadrato perfetto.

### Esempio d'uso [ modifica | modifica wikitesto ]

Ad esempio, poiché la radice quadrata di 2 deve essere compresa tra 1 e 2, stimiamo che sia circa 1,5. Applicando ripetutamente la formula otteniamo i seguenti valori:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1,5 \\
x_1 &= \frac{1}{2}\left(1,5 + \frac{2}{1,5}\right) = 1,416667 \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(1,416667 + \frac{2}{1,416667}\right) = 1,414216 \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(1,414216 + \frac{2}{1,414216}\right) = 1,414214 \\
x_4 &= \frac{1}{2}\left(1,414214 + \frac{2}{1,414214}\right) = 1,414214 \\
&\cdots;
\end{aligned}$$

in tal modo al quarto passaggio si ha il valore della radice quadrata di 2 corretto alla sesta cifra decimale.

Questo algoritmo funziona ugualmente bene per i numeri p-adici, ma non può essere usato per identificare radici quadrate reali con indice di radice p-esimo. Riferendosi a questo metodo è facile per esempio costruire una sequenza di numeri razionali che converge a $+3$ nei reali, ma a $-3$ nei 2-adici.